

# Die Verteilung von Riesen und Zwergen im kugelförmigen Sternhaufen M4

Von WERNER LOHMANN

Aus der Badischen Landessternwarte Heidelberg-Königstuhl

(Z. Naturforschg. 1, 605—608 [1946]; eingegangen am 26. Juli 1946)

Nach der Ableitung relativer Massen in den Sternhaufen M 4 und M 67 wird festgestellt, daß die Zwergen in M 4 eine Zone bevorzugen, in der die Kreisbahngeschwindigkeit ein Maximum erreicht.

Unter der Voraussetzung, daß die Sterne verschiedener Massen in Sternhaufen mit den Molekülen eines isothermen Gasgemisches verglichen werden können, hat H. v. Zeipel<sup>1</sup> 1921 gezeigt, daß aus ihrer räumlichen Verteilung relative Massen bestimmt werden können. Methodisch etwas abweichend davon, prinzipiell aber analog führten dann 1923 E. Freundlich und Heiskanen<sup>2</sup> gleiche Untersuchungen durch. Schließlich hat A. Wallenquist<sup>3</sup> in einer Reihe von Arbeiten die v. Zeipelschen Gedanken auf über ein Dutzend Sternhaufen angewandt. An Hand der erhaltenen Massenverhältnisse konnte er die Edingtonsche Masse-Leuchtkraft-Funktion bestätigen und damit die gemachten Voraussetzungen als plausibel und brauchbar beweisen.

Bedeutet bei kugelsymmetrischem Aufbau des Haufens  $\varrho(r, \mu)$  die räumliche Dichte der Sterne der Masse  $\mu$  im Abstand  $r$  vom Haufenzentrum,  $\varrho(r, 1)$  dasselbe für Sterne der Masseneinheit, so ergibt sich aus der Verteilungsfunktion

$$\varrho(r, \mu) = f(\mu) \exp 2h\mu V(r) \quad (1)$$

die Beziehung

$$\log \varrho(r, \mu) = C_p + \mu \log \varrho(r, 1). \quad (2)$$

$f(\mu)$  ist eine nur von der Masse abhängige Funktion,  $c_\mu$  eine nur von der Verteilungsfunktion der Massen abhängige Konstante,  $h$  eine allgemeine Konstante und  $V(r)$  das Potential des Haufens. Damit geht die Aufgabe, aus (2) bei bekannten räumlichen Dichten  $\varrho(r, \mu)$  und  $\varrho(r, 1)$  die mittlere Masse der Sterne einer Massengruppe zu bestimmen, im allgemeinen auf eine Ausgleichung nach den beiden Unbekannten  $\mu$  und  $c_\mu$  zurück.

Die später von J. L. Greenstein<sup>4</sup> abgeleiteten Helligkeiten und Farben der helleren Sterne des kugelförmigen Sternhaufens M 4 (NGC 6121) und des noch nicht beachteten kleineren offenen Haufens M 67 (NGC 1712) von H. Shapley<sup>5</sup> sollen im folgenden in dieser Hinsicht betrachtet werden.

Die Einteilung der 634 Sterne von M 4 in drei Gruppen  $a$ ,  $b$  und  $c$  mit den roten Farbenindizes  $C$

$$\begin{aligned} C &\leq 1^m 30 \quad (a) \\ 1^m 31 &\leq C \leq 1^m 59 \quad (b) \\ C &\geq 1^m 60 \quad (c) \end{aligned} \quad (3)$$

führt zu den Ergebnissen in Tab. 1. Die Ringfunktion bezeichnet die Sternzahl innerhalb der Ringe der in Bogenminuten gegebenen Grenzen; die Dichten in der Projektion und im Raum beziehen sich auf die Quadratbogenminute bzw. Kubik-

<sup>1</sup> Die Bestimmung der Massen der Sterne aus ihrer Verteilung in den Sternhaufen. Astron. Nachr. Jubiläumsnummer 1921, S. 32.

<sup>2</sup> Über die Verteilung der Sterne verschiedener Massen in den kugelförmigen Sternhaufen. Z. Physik **14**, 226 [1923].

<sup>3</sup> Researches based on the space distribution of stars in stellar clusters. Ann. v. d. Bosscha-Sternwacht Lembang, Java, Vol. IV, Nr. 5 [1933].

<sup>4</sup> Magnitudes and colors in the globular cluster M 4. Astrophysic J. **90**, Nr. 3, 387 [1939].

<sup>5</sup> A catalogue of 311 stars in Messier 67, Contributions from the Mt. Wilson Observ. **117** [1916].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Grenzen	Ringfunktion			geglättete Ringfunktion			Dichte in der Projektion (pro min <sup>-2</sup> )			Abstand	räumliche Dichte (pro min <sup>-3</sup> )		
	a	b	c	a	b	c	a	b	c		a	b	c
0' — 2'	41	49	76	41	50	76	3,26	3,98	6,04	2'	0,332	0,436	0,695
2 — 4	28	44	65	35	44	65	0,928	1,167	1,725	4	0,0708	0,0892	0,126
4 — 6	37	29	36	28	31	37	0,446	0,494	0,589	6	0,0276	0,0281	0,0334
6 — 8	20	22	28	22	22	28	0,250	0,250	0,318	8	0,0127	0,0115	0,0157
8 — 10	13	18	24	16	19	24	0,142	0,168	0,212	10	0,00700	0,00684	0,0054
10 — 12	16	23	14	13	18	20	0,094	0,130	0,145	12	0,00398	0,00464	0,00544
12 — 14	10	16	25	10	16	17	0,061	0,098	0,104				

Tab. 1. Die Verteilung der Sterne der 3 Gruppen *a*, *b*, *c* im Kugelhaufen M 4.

bogenminute. Nach der C. Plummer'schen Formel<sup>6</sup>

$$\varrho = - \frac{1}{2r\pi} \frac{dS}{dr} \quad (4)$$

ergibt sich die räumliche Dichte  $\varrho(r)$ , wenn die Projektion des Haufens — die flächenhafte Wiedergabe des Sternhaufens an der Sphäre — in parallele Streifen im Abstand  $r$  vom Haufenmittelpunkt mit der Sternzahl  $S$  eingeteilt wird. Diese Streifenfunktion lässt sich leicht aus der Verteilung in der Projektion herleiten, doch ist bei ihrer Verwendung in (4) zu beachten, daß die Begrenzung des Haufens so gewählt sein muß, daß (4) auch dann exakt arbeitet, wenn sich die Sternzählungen nicht bis zur äußersten Grenze des Haufens erstrecken<sup>7</sup>.

Für M 67 reicht das Material nur zu einer Zweiteilung aus, so daß zur Gruppe *a* die Sterne mit den (gewöhnlichen) Farbenindizes  $F.I. < 0^m 90$ , zur Gruppe *b* diejenigen mit  $F.I. > 0^m 91$  gehören. Tab. 2 enthält die Ergebnisse. Die nach (2) bestimmten relativen Massen sind in Tab. 3 ange-

<sup>6</sup> On the problem of distribution in globular star clusters. Monthly Notices of the Royal Astron. Soc. **71**, 460 [1911].

Haufen	relative Masse	Farbe
M 4 {	0,896 ± 0,032	weiß
	0,954 ± 0,022	gelb
	1,000	rot
M 67 {	0,448 ± 0,055	weißgelb
	1,000	rot

Tab. 3. Die relative Masse der Sterne der Gruppen *a*, *b* und *c* in M 4 und M 67.

führt, in die noch eine summarische Farbbezeichnung aufgenommen worden ist. Die kleinen mittleren Fehler zeigen, daß alle Voraussetzungen, auch die Gruppeneinteilungen, brauchbar sind. Die relativen Massen unterscheiden sich in M 67 stärker als in M 4.

Die Zusammenballung der roten Sterne ist in M 67 ausgeprägter als in M 4. Anschaulich geht sie aus Abb. 1 hervor, in der in Abhängigkeit des Abstandes vom Haufenzentrum (nach Tab. 2) das Zahlenverhältnis der weiß-gelben zu den roten Sternen aufgetragen ist. Für M 4 ist eine ähnliche Figur lediglich mit den Unterlagen der

<sup>7</sup> W. Lohmann, Die Verteilung des Lichtes in den kugelförmigen Sternhaufen M 5, M 15 und M 92. Z. Astrophysik **12**, 1 [1936].

Grenzen	Ringfunktion		geglättete Ringfunktion		Dichte in der Projektion (pro min <sup>-2</sup> )		Abstand	räumliche Dichte (pro min <sup>-3</sup> )	
	a	b	a	b	a	b		a	b
0' — 2,5'	12	23	15	28	0,765	1,428	2'	0,0700	0,1591
2,5 — 4,5	22	42	22	37	0,500	0,841	4	0,0350	0,0884
4,5 — 6,5	24	23	24	23	0,347	0,333	6	0,0196	0,0286
6,5 — 8,5	23	8	24	11	0,254	0,117	8	0,0147	0,00796
8,5 — 10,5	26	10	22	7	0,184	0,059	10	0,0105	0,00850
10,5 — 12,5	16	7	16	5	0,111	0,035	12	0,00769	0,00212
12,5 — 14,5	0	2	3	3	0,018	0,018			

Tab. 2. Die Verteilung der Sterne der 2 Gruppen *a* und *b* im offenen Sternhaufen M 67.

Abstand	räumliche Dichte (634 Sterne)		räuml. Dichte (8100 Sterne) pro pc <sup>3</sup>	Verhältnis Zwerge/Riesen	
	pro min <sup>3</sup>	pro pc <sup>3</sup>			
2'	1,1 pc	1,463	8,76	120	13,7
4	2,2	0,286	1,71	44	25,7
6	3,2	0,089	0,53	7	13,2

Tab. 4. Das Verhältnis Anzahl der Zwerge/Anzahl der Riesen in M 4.

Tab. 1 nicht so instruktiv, wird es aber, wenn man die 634 photometrierten helleren Sterne mit der Gesamtzahl der durch Zählungen erfaßten 8100 Sterne, also größtenteils schwächeren Sternen, vergleicht. Alles dazu Notwendige steht in Tab. 4, die eingangs entsprechend der Entfernung

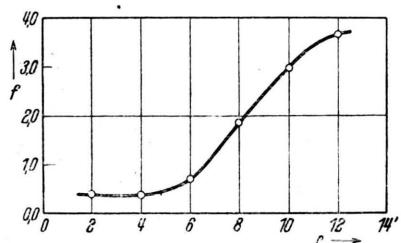


Abb. 1. Das Verhältnis  $f = \text{Sternzahl } a/\text{Sternzahl } b$  in M 67 als Funktion des Abstandes vom Haufenzentrum.

des Haufens (1900 parsec) die Abstände vom Haufenmittelpunkt in Bogenminuten und in parsec ( $2' = 1,1 \text{ pc}$ ) gibt. Dann folgt nach den räumlichen Dichteverteilungen das Verhältnis der Zahl aller Sterne zur Zahl der hellen Sterne, kurz Verhältnis Zwerge/Riesen genannt. Überraschenderweise nimmt dieses Verhältnis mit wachsendem Abstand nicht monoton zu, sondern fällt nach einem Maximum wieder ab.

Da Greenstein die räumlichen Dichten nur bis zum Abstand von  $3,1 \text{ pc}$  angegeben hat, schien es zur Sicherung des Vergleiches angebracht, die Dichteverteilung der hellen Sterne in feinerer Unterteilung, alle drei Gruppen  $a$ ,  $b$  und  $c$  zusammengefaßt, zu wiederholen. Das Ergebnis enthalten Tab. 5 und Abb. 2.

Kleine unbedeutende Unterschiede in den erhaltenen räumlichen Dichteverteilungen (Tab. 4 Spalte 4 und Tab. 5 Spalte 2) lassen sich durch Auffassungsunterschiede beim Glätten der Ringfunktionen erklären. Es ergibt sich auch jetzt die eigenartige Tatsache, daß in einer mittleren Haufen-

Abstand	räuml. Dichte (634 Sterne) pro pc <sup>3</sup>	räuml. Dichte (8100 Sterne) pro pc <sup>3</sup>	Verhältnis Zwerge/Riesen
1'	37,0	450	12,2
2	7,96	120	15,1
3	3,62	62	17,1
4	1,77	44	24,9
5	0,90	24	26,7
6	0,50	7	14,0

Tab. 5. Das Verhältnis Zwerge/Riesen in M 4 bei feinerer Unterteilung.

region die Häufigkeit der Zwerge ein Maximum erreicht. Leider wird durch den oben genannten Grund dieses Maximum nur durch einen Punkt auf dem abfallenden Ast der Kurve hervorgeru-

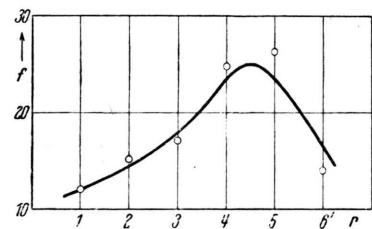


Abb. 2. Das Verhältnis  $f = \text{Zwerge/Riesen}$  in M 4.

fen, so daß man es schließlich für einen Scheineffekt halten könnte. Indessen sprachen mehrere Umstände für seine Realität. Erstens ist die Streuung der Einzelwerte um die ausgleichende Kurve viel kleiner, als einem Faktor 2 entspräche, um den das Verhältnis bei 6' herausfallen würde. Zweitens ist ein ähnliches Verhalten schon in den kugelförmigen Sternhaufen M 15 und M 92<sup>7</sup> gefunden worden. Und drittens läßt sich auch ein theoretischer Hinweis für seine Existenzmöglichkeit finden.

Allgemein kann die Verteilung der Sterne aller Massen in Kugelsternhaufen durch das Schuster'sche Gesetz

$$\varrho = \varrho_0 \left( \frac{b^2}{b^2 + r^2} \right)^{5/2} \quad (5)$$

dargestellt werden, worin  $\varrho_0$  die zentrale Dichte und  $b$  der Formparameter ist. Wenn sich die Sterne in Kreisbahnen um das Zentrum bewegen,

so gibt es nach E. Strömgren<sup>8</sup> eine maximale Bahngeschwindigkeit bei

$$r = b\sqrt{2}^*, \quad (6)$$

während die Geschwindigkeiten im Zentrum und im Unendlichen Null sind. Im Gegensatz hierzu ist es nach W. Stepanoff<sup>9</sup> nicht möglich, einen Kugelsternhaufen nur aus Sternen aufzubauen, die sich in Pendelbahnen durch das Zentrum bewegen.

Aus (6) berechnet sich mit dem schätzungsweise bei  $r = 2,5 \text{ pc}$  liegenden Maximum  $b = 1,8 \text{ pc}$ ,

\* Strömgren gibt  $r = \sqrt{6}$ , da er von vornherein das spezielle Modell mit  $b = \sqrt{3}$  betrachtet.

<sup>8</sup> Über Bewegungsformen in Globular Clusters. Astron. Nachr. **203**, 17 [1916].

<sup>9</sup> Zur Frage über stationäre kugelförmige Sternhaufen. Russ. Astron. J. **V**, Nr. 2/3, 132 [1928].

während eine direkte Darstellung der Greensteinschen Zählungen nach (5) zu  $b = 1,55 \text{ pc}$  führt. Durch diese hinreichende Übereinstimmung ist auf jeden Fall die Größenordnung gewahrt. Bedenkt man nun noch, daß unter Beibehaltung des Äquipartitionsprinzips der kinetischen Energie der Sterne des Haufens die Sterne kleinerer Masse plausiblerweise in der Zone maximaler Geschwindigkeiten häufiger vorkommen werden als in den übrigen Gebieten, so läßt sich der obige Befund auch dynamisch erklären. Die Einschränkung liegt nur darin, daß durch die Annahme von Kreisbahnen die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung des isothermen Sterngases verletzt wird. Sie ist indessen weniger streng, wenn kreisähnliche Rosettenbahnen mit in die Betrachtung einbezogen werden.

## Der mathematische Rahmen der Quantentheorie der Wellenfelder

Von WERNER HEISENBERG

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. **1**, 608—622 [1946]; eingegangen am 5. Aug. 1946)

Die übliche Quantentheorie der Wellenfelder, bei der man von einer Hamilton-Funktion in Abhängigkeit von irgendwelchen Feldgrößen ausgeht, führt im allgemeinen zu Divergenzen. Der vorliegende Aufsatz stellt einen zusammenfassenden Bericht über verschiedene Arbeiten dar, die durch Erweiterung des bisherigen Verfahrens den mathematischen Rahmen einer zukünftigen Theorie der Wellenfelder oder der Elementarteilchen festzulegen suchen. Dabei wird einerseits auf die Bedeutung einer unitären Matrix, der sogenannten Streumatrix, und einer mit ihr verknüpften hermitischen Matrix hingewiesen; andererseits wird gezeigt, daß auch bei einer Erweiterung der bisherigen Wellengleichungen zu sehr allgemeinen Integro-Differentialgleichungen die Forderungen der Quantentheorie zu einem eindeutigen mathematischen Formalismus führen.

Die Quantentheorie der Wellenfelder in ihrer üblichen Form ist unbefriedigend, weil sie meist zu Divergenzen führt, die die strenge mathematische Behandlung der betreffenden Probleme verhindern. Eine Theorie dieser Art kann also nur als eine ausgearbeitete korrespondenzmäßige Behandlung der gestellten Fragen angesehen werden. Trotz der Erfolge bei der Quantenelektrodynamik<sup>1</sup> oder der Theorie des Mesons<sup>2</sup> ist der bisherige Formalismus also sicher noch nicht

richtig, und es entsteht die Frage, wie das strenge mathematische Schema für eine zukünftige Theorie der Elementarteilchen aussehen wird. Der Verfasser hat in den vergangenen Jahren in vier Arbeiten, die für die Zeitschrift für Physik bestimmt waren<sup>3</sup>, den mathematischen Rahmen einer solchen Theorie erörtert und die Bedingungen studiert, denen sie zu genügen hat. Von den genannten Arbeiten ist die vierte infolge der Zeitumstände noch nicht erschienen, und auch die dritte scheint nur wenigen Physikern zugänglich zu sein. Ferner Bhabha, Nature [London] **141**, 117 [1938]; G. Wentzel, Helv. Phys. Acta **13**, 269 [1940]; **14**, 633 [1941]; Z. Physik **118**, 277 [1941].

<sup>1</sup> Vergl. z. B. G. Wentzel, Z. Physik **86**, 479; **86**, 635; **87**, 726 [1934]; P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. [London] **167**, 148 [1938] und Bakerian lecture 1942 (?); F. Bopp, Ann. Physik **38**, 345 [1940]; **42**, 573 [1942].

<sup>2</sup> S. Yukawa, Proc. phys.-math. Soc. Japan **17**, 48 [1935]; H. Fröhlich, W. Heitler u. N. Kemmer, Proc. Roy. Soc. [London] **166**, 154 [1938];

<sup>3</sup> W. Heisenberg, Z. Physik **120**, 513 (I); **120**, 673 (II) [1943]; **123**, (?) (III) [1945]; im folgenden als I. c. I, II, III zitiert. Teil IV wird später erscheinen.